CP n° 7 - Calcul de primitives

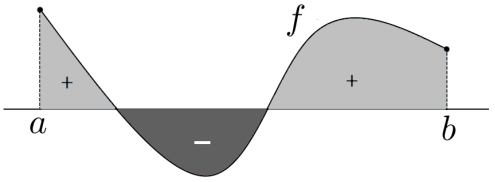
1 Primitives d'une fonction continue

Notations. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note :*
- *$\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions **continues** de I dans $\mathbb{R}$ (et $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{C})$ pour les fonctions continues à valeurs complexes) ;*
- *$\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions **dérivables dont la dérivée est continue**.*

Définition (Primitive)**.** *Soit I un intervalle et g une fonction $I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $G : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est **une** primitive de g si G est dérivable sur I et vérifie :* $\boxed{\forall x \in I\,,\ G'(x) = g(x)}$.

Remarques :
- *Si G est une primitive de g, alors pour toute constante $C \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), la fonction $G + C$ est aussi une primitive de g car $(G + C)' = G' + C' = g + 0$.*
- *Réciproquement, si $\tilde{G}$ est une autre primitive de g, alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) telle que $\tilde{G} = G + C$. En effet, la fonction $(\tilde{G} - G)$ a une dérivée égale à $g - g = 0$, donc elle est constante sur l'intervalle I.*

Définition (Intégrale)**.** *Soit $a \leqslant b$ deux réels et f une fonction **continue sur le segment** $[a, b]$. L'intégrale $\int_a^b f$ est l'aire entre le graphe de f et l'axe des abscisses, entre a et b, aire comptée "algébriquement".*

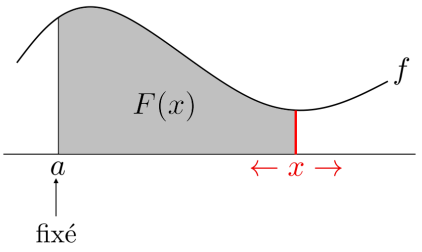


On définit également $\displaystyle\int_b^a f := -\int_a^b f$. *Dans le cas où f est à valeurs complexes, on définit :*

$$\int_a^b f \ := \ \int_a^b Re(f) \ + \ i \int_a^b Im(f)$$

Théorème ("Théorème fondamental de l'analyse")**.**
Soit $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ (ou $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{C})$), où I est un intervalle, et soit $a \in I$ fixé.
Soit F l'application $I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) définie par :

$$\forall \boldsymbol{x \in I}\,, \quad \boldsymbol{F(x) := \int_a^x f(t)\,dt}$$



*Alors F **est une primitive de** f. Plus précisément, il s'agit de LA primitive de f qui s'annule en a.*

Conséquences.
- ▶ *Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives.*
- ▶ *Si F est une primitive quelconque de f : $\forall a, b \in I$:* $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \ = \ [F(t)]_a^b \ = \ F(b) - F(a)}$

dem du 2nd point : $\forall x \in [a,b]$, on pose $\tilde{F}(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. D'après le thm fondamental de l'analyse, $\tilde{F}$ est une primitive de f (comme F), donc $\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\tilde{F} = F + C$. On écrit alors :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \underset{\text{def } \tilde{F}}{=} \tilde{F}(b) = \tilde{F}(b) - \underbrace{\tilde{F}(a)}_{=0} = F(b)\boxed{+C} - F(a)\boxed{-C} = F(b) - F(a)$$

2 Primitives usuelles

Fonction f	**une primitive** F	**Intervalle** I
$x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \neq -1$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$I \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^*$ selon α
$x \mapsto e^{ax}$, $a \neq 0$	$x \mapsto \dfrac{1}{a}e^{ax}$	$I \subset \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(ax)$	$x \mapsto \dfrac{-1}{a}\cos(ax)$	$I \subset \mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(ax)$	$x \mapsto \dfrac{1}{a}\sin(ax)$	$I \subset \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(x)$ ou $x \mapsto \ln(-x)$	$I \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $I \subset \mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto x\ln(x) - x$	$I \subset \mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	tan	$I \subset \left]\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$
tan	$x \mapsto -\ln(\cos x)$ ou $x \mapsto -\ln(-\cos x)$	$I \subset \left]\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Arcsin	$I \subset]-1,1[$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$	Arctan	$I \subset \mathbb{R}$
sh	ch	$I \subset \mathbb{R}$
ch	sh	$I \subset \mathbb{R}$

Remarque : La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ n'admet pas de primitive exprimable avec des fonctions usuelles.

3 Formes reconnaissables

Fonction	**une primitive**		**Fonction**	**une primitive**
$u' \times u^n$ $(n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$		$\dfrac{u'}{u^n}$ $(n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\})$	$\dfrac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$		$u'e^u$	e^u
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(u)$ ou $\ln(-u)$		$u'\cos(u)$	$\sin(u)$

4 Intégration par parties

Théorème. *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$ (fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors :*

$$\int_a^b u(t)\times v'(t)\,dt \;=\; [u(t)\times v(t)]_a^b \;-\; \int_a^b u'(t)\times v(t)\,dt$$

dem : $(uv)' = u'v + uv'$ donc en intégrant entre a et b :

$$\underbrace{\int_a^b (uv)'(t)\mathrm{d}t}_{[(uv)(t)]_a^b} = \int_a^b u'(t).v(t)\mathrm{d}t + \int_a^b u(t).v'(t)\mathrm{d}t \qquad \underline{\text{ok}}$$

Rédaction d'une IPP : pour $x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x te^t\mathrm{d}t \;=\;?$

On pose : $\left\{\begin{array}{lll} u(t)=t & ; & u'(t)=1 \\ v'(t)=e^t & ; & v(t)=e^t \end{array}\right.$. Par intégration par parties :

$$\int_0^x te^t\mathrm{d}t \;=\; [te^t]_0^x - \int_0^x e^t\mathrm{d}t \;=\; (xe^x-0)-(e^x-1) \;=\; xe^x - e^x + 1$$

5 Changement de variable

Théorème. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, φ une fonction $\mathcal{C}^1$ de J dans I, f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), et $a,b\in J$. Alors :*

$$\int_a^b f(\varphi(t)).\varphi'(t)\,dt \;=\; \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)\,ds$$

dem : Soit F une primitive de f (il en existe une car f est continue). Le terme de droite dans l'égalité vaut donc $F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$.
Par ailleurs, la dérivée de $F\circ\varphi$ est $(F\circ\varphi)' = (F'\circ\varphi)\times\varphi' = (f\circ\varphi)\times\varphi'$.
Donc le terme de gauche de la formule vaut

$$\int_a^b (F\circ\varphi)'(t)\mathrm{d}t = [F\circ\varphi(t)]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \qquad \underline{\text{ok}}$$

Remarque : Le changement de variable se note alors $\boxed{s=\varphi(t)}$ *et on s'autorise les notations "à la physicienne"* $\boxed{ds=\varphi'(t)\,dt}$ *pour interpréter la formule :*

$$\int_a^b f(\underbrace{\varphi(t)}_{s}).\underbrace{\varphi'(t)\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}s} \;=\; \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)\mathrm{d}s$$

Rédaction d'un chgt de variable : pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, $G(x) := \displaystyle\int_1^x \frac{\sin(\ln t)+\cos(\ln t)}{t}\mathrm{d}t \;=\;?$

On pose le changement de variable $\boxed{s=\ln t\ ,\ \mathrm{d}s=\dfrac{\mathrm{d}t}{t}}$.

$$G(x) = \int_{\ln(1)}^{\ln(x)} (\sin(s)+\cos(s))\mathrm{d}s = [-\cos(s)+\sin(s)]_0^{\ln x} = -\cos(\ln x)+\sin(\ln x)+1$$

Chgt de variable "à l'envers" : plutôt que d'utiliser l'égalité de gauche à droite, il est parfois (et même souvent) utile de l'utiliser de droite à gauche. On part cette fois de l'intégrale "de droite" $\int_A^B f(s)\mathrm{d}s$ et on pose le changement de variable $s = \varphi(t)$, $\mathrm{d}s = \varphi'(t)\mathrm{d}t$.
La difficulté est alors ici de trouver les bornes de l'intégrale "de gauche", pour cela il faudra trouver a et b tels que $A = \varphi(a)$ et $B = \varphi(b)$.

Exemple : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-s^2}\,\mathrm{d}s \;= ?$

On remarque que poser $s = \cos(t)$ simplifie le calcul car $\sqrt{1-\cos^2(t)} = \sqrt{\sin^2(t)} = |\sin(t)|$.
Donc on pose le changement de variable : $\boxed{s = \cos(t)\ ;\ \mathrm{d}s = -\sin(t)\,\mathrm{d}t}$. Pour le changement des bornes de l'intégrale, on cherche a et b tels que $\cos a = 0$ et $\cos b = 1$. Les valeurs $a = \frac{\pi}{2}$ et $b = 0$ conviennent (entre autres car on aurait pu choisir d'autres valeurs comme par exemple $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = \pi$)

On réalise alors les substitutions :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \underbrace{\sqrt{1-s^2}}_{\sqrt{1-\cos^2(t)}} \underbrace{\mathrm{d}s}_{-\sin(t)\mathrm{d}t} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -|\sin(t)|\sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\pi/2}^0 -\sin^2(t)\mathrm{d}t \qquad \left(\text{pour } t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \sin(t)\geqslant 0 \text{ et donc } |\sin t| = \sin t\right) \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

C'est gagné ! On linéarise : $\sin^2(t) = \frac{1}{2}(1-\cos(2t))$, et :

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos(2t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

6 Techniques classiques

1. **Calcul de $\displaystyle\int_{\mathbf{x_1}}^{\mathbf{x_2}} \mathbf{P(t)e^{at}\,dt}$, où P est un polynôme**, comme par ex $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}(t^2-3t+1)e^t\,\mathrm{d}t$: une méthode consiste à réaliser des IPP, en dérivant le polynôme et en "primitivant" $t\mapsto e^{at}$. "Primitiver" $t\mapsto e^{at}$ ne pose aucun problème, on obtient toujours $t\mapsto e^{at}$ avec simplement des constantes multiplicatives. Dériver P fait baisser le degré du polynôme. On peut donc répéter les IPP jusqu'à obtenir une constante.

2. **Primitive de $\mathbf{t\mapsto \cos^n(at)\sin^m(bt)}$, où $\mathbf{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$**, comme par ex $\mathbf{t\mapsto \cos^2(t)\sin(2t)}$: une méthode consiste à linéariser $\cos^n(at)\sin^m(bt)$. On obtient alors une somme de termes du type $A\cos(kt)$ ou $A\sin(kt)$ que l'on sait intégrer séparément sans problème.

3. **Primitive de $\mathbf{t\mapsto e^{at}\cos(bt)}$** : une méthode consiste à se ramener à une exponentielle complexe, en écrivant $e^{at}\cos(bt) = \mathrm{Re}(e^{at+ibt}) = \mathrm{Re}(e^{(a+ib)t})$, de prendre une primitive complexe de $t\mapsto e^{(a+ib)t}$, puis de prendre la partie réelle de cette primitive.

4. **Primitive de $\mathbf{t\mapsto \dfrac{1}{at^2+bt+c}}$** : la méthode dépend du discriminant Δ du polynôme.
   - si $\Delta > 0$ alors at^2+bt+c se factorise en $a(t-t_1)(t-t_2)$ où t_1 et t_2 sont les 2 racines. On décompose alors la fraction en éléments simples $\dfrac{1}{at^2+bt+c} = \dfrac{\alpha}{t-t_1} + \dfrac{\beta}{t-t_2}$ et une primitive est du type $t\mapsto \alpha\ln(|t-t_1|) + \beta\ln(|t-t_2|)$.
   - si $\Delta = 0$ alors at^2+bt+c se factorise en $a(t-t_0)^2$ où t_0 est la racine double. D'où $\dfrac{1}{at^2+bt+c} = \dfrac{1}{a(t-t_0)^2}$, et une primitive est $t\mapsto \dfrac{-1}{a}.\dfrac{1}{t-t_0}$.
   - si $\Delta < 0$, alors la forme canonique de at^2+bt+c est du type $a\left((t-t_0)^2+r^2\right)$, que l'on met sous la forme $a.r^2\left(\left(\frac{t-t_0}{r}\right)^2+1\right)$.
     On conclut grâce au fait qu'une primitive de $t\mapsto \dfrac{1}{\left(\frac{t-t_0}{r}\right)^2+1}$ est $t\mapsto r.\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{t-t_0}{r}\right)$.

Parenthèse : justification mathématique de la méthode de séparation des variables

Rédaction en chimie : on part de

$$\boxed{-\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} = k[A]^p} \qquad \text{pour un } p \neq 1$$

On sépare les variables en $-\dfrac{\mathrm{d}[A]}{[A]^p} = k.\mathrm{d}t$, et on intègre entre les instants 0 et τ :

$$-\int_{[A]_0}^{[A]_\tau} \frac{\mathrm{d}[A]}{[A]^p} = k\int_0^\tau \mathrm{d}t \qquad \text{ce qui donne} \quad -\frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{[A]^{p-1}}\right]_{[A]_0}^{[A]_\tau} = k\tau$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad -\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{[A]_\tau^{p-1}} - \frac{1}{[A]_0^{p-1}}\right) = k\tau$$

et on isole $[A]_\tau$ pour l'exprimer en fonction de τ.

Rédaction en maths : $[A]$ est une fonction ; notons-la A. Supposons qu'elle ne s'annule jamais. L'équation $-\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} = k[A]^p$ signifie :

$$\forall t \geqslant 0\,, \ \boxed{-A'(t) = k\big(A(t)\big)^p}$$

On l'écrit sous la forme $-\dfrac{A'(t)}{A(t)^p} = k$ et on intègre sur $[0, \tau]$:

$$-\int_0^\tau \frac{A'(t)}{A(t)^p}\,\mathrm{d}t = \int_0^\tau k.\mathrm{d}t = k\tau$$

Dans l'intégrale de gauche, on fait le changement de variable $s = A(t)$, $\mathrm{d}s = A'(t)\mathrm{d}t$ pour obtenir :

$$-\int_{A(0)}^{A(\tau)} \frac{\mathrm{d}s}{s^p} = k\tau \qquad \text{ce qui donne} \quad -\frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{s^{p-1}}\right]_{A(0)}^{A(\tau)} = k\tau$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad -\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{A(\tau)^{p-1}} - \frac{1}{A(0)^{p-1}}\right) = k\tau$$

et on isole $A(\tau)$ pour l'exprimer en fonction de τ.